MENENTUKAN AKAR-AKAR DAN DISKRIMINAN PADA PERSAMAAN KUARTIK

Tugas Akhir

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

oleh

L A I N A
10654004479

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2011

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan judul **“Menentukan Akar-akar dan Diskriminan pada Persamaan Kuartik”** tepat pada waktunya. Tugas Akhir ini merupakan salah satu syarat kelulusan tingkat sarjana.

Selanjutnya limpahan salawat serta salam kepada junjungan Alam Nabi Besar Muhammad SAW pembawa petunjuk bagi seluruh umat manusia.

Penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini penulis tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu sudah sepantasnya penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta ayah (Musri) dan Ibu (Azizah) yang tidak pernah lelah dan tiada henti melimpahkan kasih sayang, perhatian, motivasi yang membuat penulis mampu untuk terus dan terus melangkah, pelajaran hidup, juga materi yang tak mungkin bisa terbalaskan. Jasa-jasamu kan selalu ku kenang hingga akhir hayatku dan semoga Allah menjadikan jasa-jasamu sebagai amalan soleh, Amin.

Selanjutnya ucapan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. DR. H. M. Nazir, M.A. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra.Yenita Morena, M.Si. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Yuslenita Muda, M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc. selaku koordinator sekaligus penguji I Tugas akhir pada Jurusan Matematika yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan Tugas Akhir ini.
5. Bapak M.Soleh, M.Sc. selaku pembimbing Tugas Akhir pada Jurusan Matematika yang telah banyak membantu, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dalam penulisan Tugas Akhir ini dari awal proses hingga laporan ini selesai.

6. Bapak M.Nizam Muhaijir, S.Si. sebagai penguji II yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan Tugas Akhir ini.
7. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim.
8. Paman, Tante-tante, Adik-adikku, dan buat seluruh keluarga yang telah memberikan doa, perhatian, kasih sayang serta motivasi untukku.
9. Teman-teman seperjuangan angkatan 2006 di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
10. Senior-senior dan junior-junior di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
11. Sahabat-sahabat terbaikku Devi, Tifah, Adri, Vira, Desi, Nafi, Jeldi, Parida, Hendri, Yunus, kakak Wina, bang Jamil, bang Bambang, Mukti, dan Maya yang selalu memberikan bantuan, motifasi dan masukan yang sangat berguna dalam penulisan Tugas Akhir ini.
12. Seluruh pihak yang telah memberikan andil dalam proses penulisan Tugas Akhir ini sampai selesai yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penyusunan dan penulisan Tugas akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin untuk menghindari kesalahan. Akhirnya penulis mengharapkan kepada pembaca Tugas Akhir ini agar memberikan saran dan kritik konstruktif. Semoga Tugas Akhir ini dapat memberikan konstribusi yang bermanfaat. Amin.

Pekanbaru, 28 Juni 2011

Penulis

MENENTUKAN AKAR-AKAR DAN DISKRIMINAN PADA PERSAMAAN KUARTIK

LAINA
NIM: 10654004479

Tanggal Sidang : 28 Juni 2011
Periode Wisuda : November 2011

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas tentang menentukan akar-akar dan diskriminan pada persamaan kuartik. Persamaan kuartik merupakan persamaan polinomial dengan derajat tertinggi empat. Akar-akar persamaan kuartik dapat ditentukan dengan formula *Ferrari*. Hasil pembahasan menunjukkan bahwa jenis akar-akar tergantung pada nilai diskriminan.

Kata Kunci : Diskriminan Polinomial, Formula *Ferrari*, Persamaan Kuartik, Polinomial.

DAFTAR ISI

		Halaman
LEMBAR PERSETUJUAN	....	ii
LEMBAR PENGESAHAN	....	iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL	....	iv
LEMBAR PERNYATAAN	....	v
LEMBAR PERSEMBAHAN	....	vi
ABSTRAK	....	vii
ABSTRACT	....	viii
KATA PENGANTAR	....	ix
DAFTAR ISI	....	xi
DAFTAR SIMBOL	....	xiii
BAB I PENDAHULUAN		
1.1 Latar Belakang	....	I-1
1.2 Rumusan Masalah	....	I-2
1.3 Batasan Masalah	....	I-2
1.4 Tujuan dan Manfaat Penelitian	....	I-2
1.4.1 Tujuan Penelitian	....	I-2
1.4.2 Manfaat Penelitian	....	I-3
1.5 Sistematika Penulisan	....	I-3
BAB II LANDASAN TEORI		
2.1 Persamaan Polinomial	....	II-1
2.2 Diskriminan Polinomial	....	II-1
2.3 Persamaan Kubik Nested	....	II-3
2.4 Persamaan Kubik Depressed	....	II-3
2.5 Persamaan Bikuadratik	....	II-4
2.6 Menentukan Akar-akar Persamaan Kubik dengan Formula Cardano	....	II-4
2.7 Diskriminan Persamaan Kubik	....	II-11

BAB III METODOLOGI PENELITIAN III-1
BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN
4.1 Akar-akar pada Persamaan Kuartik IV-1
4.2 Diskriminan Persamaan Kuartik IV-1
BAB V PENUTUP
5.1 Kesimpulan V-1
5.2 Saran V-1

DAFTAR PUSTAKA
LAMPIRAN
DAFTAR RIWAYAT HIDUP

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada ilmu Aljabar dikenal istilah persamaan polinomial, yang mempunyai bentuk umum :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ ,$$

dengan $a_n \neq 0$ dan $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ konstanta riil.

Untuk mendapatkan akar-akar persamaan polinomial biasanya digunakan metode *Horner*, tetapi ada beberapa persamaan polinomial yang akar-akarnya tidak dapat ditebak sehingga perlu menggunakan metode lain.

Ada beberapa persamaan polinomial yang sering muncul dalam matematika diantaranya adalah persamaan kuadrat, persamaan kubik, dan persamaan kuartik. Persamaan kuadrat mempunyai bentuk umum:

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

dengan $a_2 \neq o$ dan a_2, a_1, a_0 konstanta riil. Untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat, salah satunya digunakan rumus kuadratik, yaitu

$$x_{1,2} = \frac{a_2 \pm \sqrt{{a_1}^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$$

Jenis-jenis akar dari persamaan kuadrat ditentukan oleh nilai diskriminannya, yang dinotasikan dengan D, dengan nilai D adalah:

$$D = {a_1}^2 - 4a_2 a_0$$

Persamaan kubik merupakan persamaan polinomial dengan derajat tertinggi tiga. Bentuk persamaan kubik secara umum adalah:

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a = 0,$$

dengan $a_3 \neq o$ dan a_3, a_2, a_1, a_0 konstanta riil.

Metode untuk menentukan akar-akar persamaan kubik dikemukakan oleh *Gerolamo Cardano* dan biasa disebut formula *Cardano* atau Rumus Kubik.

Persamaan kuartik merupakan persamaan polinomial dengan derajat tertinggi empat. Bentuk persamaan kuartik secara umum adalah

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a = 0,$$

dengan $a_4 \neq 0$ dan a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 konstanta riil. Persamaan kuartik pertama kali dikemukakan oleh Matematikawan Jaina dan Astronom Bhaskara di India Kuno antara tahun 400 dan 200 sesudah masehi. *Lodovico Ferrari* dikenal sebagai penemu teknik Aljabar untuk menyelesaikan persamaan umum kuartik pada tahun 1540. Oleh karena itu metode untuk menentukan akar-akar persamaan kuartik disebut formula *Ferrari*.

Berdasarkan tugas akhir yang berjudul ”Menentukan Akar-akar dan Diskriminan pada Persamaan Kubik” tulisan *Ani Fitri Rohani* yang membahas tentang menentukan akar-akar dari persamaan kubik dan menentukan diskriminan (D) serta pengaruhnya terhadap akar-akar kubik tersebut, maka penulis mencoba membahas dan mengembangkan derajat pada tugas akhir tersebut, yaitu persamaan kuartik dengan menggunakan formula *Ferrari.*

Berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis tertarik untuk melanjutkannya dengan memberi judul tugas akhir ini ”MENENTUKAN AKAR-AKAR DAN DISKRIMINAN PADA PERSAMAAN KUARTIK”

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas pada tugas akhir ini, yaitu bagaimana menentukan akar-akar dan diskriminan pada persamaan kuartik.

1.3 Batasan Masalah

Dalam menentukan akar-akar persamaan kuartik ini, penulis hanya membatasi dengan menggunakan formula *Ferrari*.

1.4 Tujuan dan Manfaat

1.4.1 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan akar-akar dan diskriminan pada persamaan kuartik.

1.4.2 Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telah dikemukakan di atas, maka manfaat yang dapat diambil adalah sebagai berikut:

1. Penulis mengharapkan dapat mengembangkan wawasan keilmuan dalam matematika khususnya mengenai persamaan polinomial.
2. Penulis dapat mengetahui lebih banyak tentang materi polinomial yang tentunya akan memberikan konstribusi untuk mempermudah dalam menyelesaikan soal-soal yang berhubungan dengan polinomial.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini, adalah sebagai berikut :

BAB I Pendahuluan

Berisi tentang latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Berisi teori-teori yang mendukung tentang akar-akar dan diskriminan pada persamaan kuartik yaitu Persamaan Polinomial, Diskriminan Polinomial, Persamaan Kubik *Nested*, Persamaan Kubik *Depressed*, dan Persamaan Bikuartik.

BAB III Metodologi Penelitian

Berisi mengenai studi pustaka atau literatur, yaitu dengan membaca buku-buku dan sumber-sumber lain yang berhubungan dengan akar-akar dan diskriminan pada persamaan kuartik .

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisikan pemaparan dalam menentukan akar-akar persamaan kuartik dan diskriminannya.

BAB V　Penutup

Dalam bab ini akan diberikan kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Landasan teori yang akan dibahas yaitu teori-teori pendukung yang terkait dan membantu untuk pembahasan dalam Bab IV, diantaranya Persamaan Polinomial, Diskriminan Polinomial, Persamaan Kubik *Nested*, Persamaan Kubik *Depressed*, dan Persamaan Bikuartik.

2.1 Persamaan Polinomial

Definisi 2.1 (Robert, Ellis : 1981)

Persamaan polinomial adalah persamaan suku banyak dalam *x* berderajat *n*, dengan bentuk umum:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0 \tag{2.1}$$

dengan $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ adalah suatu konstanta dan *n* bilangan bulat non negatif.

Derajat persamaan polinomial dalam *x* adalah pangkat tertinggi dari *x*. Pada persamaan polinomial tersebut $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ berturut-turut disebut koefisien dari $x^n, x^{n-1}, \dots, x$. Suku a_0 dinamakan suku tetap. Jika $a_n = 1$, maka persamaan (2.1) disebut polinomial *monic*.

2.2 Diskriminan Polinomial

Definisi 2.2 (Janson, Svante : 2010)
Andaikan :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\ ,$$

Sebuah polinomial dari derajat $n \geq 1$ dengan koefisien bilangan riil, maka diskriminan dari $P(x)$ yaitu:

$$a_n^{2n-2} \prod_{\substack{i,j \\ i<j}}^{n} \left(r_i - r_j\right)^2 \tag{2.2}$$

dengan $r_1, \dots, r_n$ adalah akar-akar dari $P(x)$ pada perluasan bilangan riil.

Diskriminan juga dapat didefinisikan sebagai resultan dari $P(x)$ dan turunannya terhadap x.

Diberikan :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,,$$
$$P^{'}(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{(n-1)} x^{(n-2)} + \cdots + a_1 \,,$$

maka matriks Sylvester dari P dan $P^{'}$ adalah:

$$\begin{bmatrix}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\
0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 & a_0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_1 \\
n a_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \cdots & 1a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \cdots & 1a_1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & n a_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \ldots & 1a_1
\end{bmatrix}$$

Definisikan $R(P, P') = R_{n,(n-1)}(P, P^{'})$ adalah determinan dari matriks *Sylvester* orde $(2n-1) \times (2n-1)$.

Teorema 2.1 (Janson, Svante : 2010)

Diberikan :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,,$$

Sebuah polinomial dari derajat $n \geq 1$ dengan koefisien bilangan riil, maka diskriminan dari $P(x)$ adalah:

$$D(P) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{1}{a_n} R(P, P^{'}) \qquad (2.3)$$

Bukti :

Diberikan persamaan polinomial dan turunannya terhadap x:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,,$$
$$P(x) = n a_{n-1} x^{n-1} + (n-1) a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1$$

Pada teorema 2.1 diketahui $R(P, P^{'})$. Pada umumnya, derajat $P^{'}(x)$ = derajat $P(x) - 1$ = $n-1$. Pada kasus ini jika derajat $P^{'} = k$, maka:

$$R_{n,(n-1)}(P, P^{'}) = {a_n}^{n-k-2} R_{n,k}(P, P^{'})$$

dengan

$$k = n - 1.$$

dengan demikian berdasarkan definisi 2.2, diperoleh:

$$D(P) = (-1)^{n(n-1)/2} {a_n}^{n-k-2} R(P, P')$$

$$D(P) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} {a_n}^{n-(n-1)-2} R(P, P')$$

$$D(P) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} {a_n}^{-1} R(P, P')$$

Sehingga

$$D(P) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{1}{a_n} R(P, P')$$

2.3 Persamaan Kubik *Nested*

Diketahui bentuk persamaan kuartik *depressed*

$$u^4 + \alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$$

Dapat diubah ke dalam bentuk persamaan kubik *nested*,

$$y^3 + \frac{5}{2}\alpha y^2 + (2\alpha^2 - \gamma)y + \left(\frac{\alpha^3}{2} - \frac{\alpha\gamma}{2} - \frac{\beta^2}{8}\right) = 0. \tag{2.4}$$

Berdasarkan: Faucette, William : 1996

2.4 Persamaan Kubik *Depressed*

Diberikan persamaan kubik berikut:

$$a_3\mu^3 + a_2\mu^2 + a_1\mu + a_0 = 0, a_3 \neq 0 \tag{2.5}$$

Dengan mengganti $a_3 = a, a_2 = b, a_1 = c$ dan $a_0 = d$ diperoleh:

$$a\mu^3 + b\mu^2 + c\mu + d = 0, \tag{2.6}$$

dan substitusikan

$$\mu = z - \frac{b}{3a}, \tag{2.7}$$

diperoleh

$$az^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)z + \left(d + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a}\right) = 0. \tag{2.8}$$

Persamaan (2.8) disebut persamaan kubik *depressed*.

2.5 Persamaan Bikuadratik

Diberikan persamaan kuartik:

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \tag{2.9}$$

Jika $a_3 = a_1 = 0$, maka

$$a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0 \tag{2.10}$$

Persamaan (2.10) disebut persamaan bikuadratik. Supaya mudah untuk diselesaikan, maka dimisalkan

$$\rho = x^2,$$

sehingga diperoleh persamaan baru

$$a_4\rho^2 + a_2\rho + a_0 = 0 \tag{2.11}$$

Misalkan ρ_+ dan ρ_- menjadi akar persamaan (2.11), maka akar-akar persamaan (2.10) adalah

$$x_1 = +\sqrt{\rho_+}\ ,$$

$$x_2 = -\sqrt{\rho_+}\ ,$$

$$x_3 = +\sqrt{\rho_-}\ ,$$

$$x_4 = -\sqrt{\rho_-}\ .$$

2.6 Menentukan Akar-akar Persamaan Kubik dengan Formula *Cardano*

Formula *Cardano* bisa menjadi cara alternatif untuk menentukan akar-akar persamaan kubik jika akar-akarnya tidak dapat ditentukan dengan cara memfaktorkan.

Pada persamaan (2.6), persamaan tersebut diubah ke dalam bentuk yang lebih sederhana dengan menghilangkan variabel μ^2. Misalkan μ dalam persamaan (2.6) diganti sebagai

$$\mu = z - \theta \tag{2.12}$$

Sehingga persamaan (2.6) menjadi

$$a(z-\theta)^3 + b(z-\theta)^2 + c(z-\theta) + d = 0$$

$$a(z^3 - 3\theta z^2 + 3\theta^2 z - \theta^3) + b(z^2 - 2\theta z + \theta^2) + \ c(z-\theta) + d = 0$$

$$az^3 + (b - 3\theta a)z^2 + (3a\theta^2 - 2\theta b + c)z + (-a\theta^3 + b\theta^2 - c\theta + d) = 0$$

z^2 dapat dieliminasi dengan memisalkan:

$$\theta = \frac{b}{3a},$$

dengan demikian nilai μ menjadi

$$\mu = z - \frac{b}{3a} \qquad (2.13)$$

dengan z adalah sembarang variabel, sehingga:

$$a\mu^3 = a\left(z - \frac{b}{3a}\right)^3 = a\left(z^3 - \frac{b}{a}z^2 + \frac{b^2}{3a^2}z - \frac{b^3}{27a^3}\right)$$

$$= az^3 - bz^2 + \frac{b^2}{3a}z - \frac{b^3}{27a^2}$$

$$b\mu^2 = b\left(z - \frac{b}{3a}\right)^2 = b\left(z^2 - \frac{2b}{3a}z + \frac{b^2}{9a^2}\right)$$

$$= bz^2 - \frac{2b^2}{3a}z + \frac{b^3}{9a^2}$$

$$c\mu = c\left(z - \frac{b}{3a}\right) = cz - \frac{bc}{3a}$$

maka persamaan (2.6) akan menjadi

$$az^3 - bz^2 + \frac{b^2}{3a}z - \frac{b^3}{27a^2} + bz^2 - \frac{2b^2}{3a}z + \frac{b^3}{9a^2} + cz - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

$$az^3 + (b - b)z^2 + \left(\frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c\right)z - \left(\frac{b^3}{27a^2} - \frac{b^3}{9a^2} + \frac{bc}{3a} - d\right) = 0$$

$$az^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)z - \left(\frac{b^3}{27a^2} - \frac{b^3}{9a^2} + \frac{bc}{3a} - d\right) = 0$$

$$az^3 + \frac{3ac - b^2}{3a}z - \left(\frac{9abc - 27da^2 - 2b^3}{27a^2}\right) = 0$$

$$z^3 + \frac{3ac - b^2}{3a^2}z - \left(\frac{9abc - 27da^2 - 2b^3}{27a^3}\right) = 0 \qquad (2.14)$$

dari pesamaan (2.14), misalkan:

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \qquad (2.15)$$

$$q = \frac{9abc - 27da^2 - 2b^3}{27a^3} \qquad (2.16)$$

Sehingga persamaan (2.14) menjadi:

$$z^3 + pz = q \qquad (2.17)$$

Persamaan (2.17) akan ditentukan akar-akarnya dengan mengubahnya ke dalam bentuk kuadrat.

Misalkan z pada persamaan (2.17) adalah:

$$z = w - \frac{p}{3w} \qquad (2.18)$$

Persamaan (2.17) menjadi:

$$\left(w - \frac{p}{3w}\right)^3 + p\left(w - \frac{p}{3w}\right) - q = 0 \qquad (2.19)$$

$$w^3 - \frac{p^3}{27\,w^3} - q = 0 \qquad (2.20)$$

Selanjutnya, persamaan (2.20) diubah ke dalam bentuk kuadrat dengan mengalikan kedua ruas dengan w^3 menjadi:

$$(w^3)^2 - \frac{1}{27}p^3 - q(w^3) = 0 \qquad (2.21)$$

Misalkan:

$$w^3 = f, \qquad (2.22)$$

maka persamaan (2.21) menjadi

$$f^2 - qf - \frac{1}{27}p^3 = 0\,. \qquad (2.23)$$

dengan menggunakan rumus persamaan kuadrat untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat, maka akar-akar dari persamaan (2.23) menjadi

$$f = \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} \qquad (2.24)$$

Misalkan

$$Q = \frac{1}{3}p, \qquad (2.25)$$

$$R = \frac{1}{2}q, \qquad (2.26)$$

maka persamaan (2.24) dapat ditulis

$$f = R \pm \sqrt{R^2 + Q^3}. \qquad (2.27)$$

Berdasarkan persamaan (2.22) maka

$$w^3 = R \pm \sqrt{R^2 + Q^3},$$

atau

$$w = \sqrt[3]{R \pm \sqrt{R^2 + Q^3}}\ . \tag{2.28}$$

Pada persamaan (2.28) belum dapat diketahui akar-akar dari persamaan kubik. Selanjutnya akan ditentukan ketiga faktor dari persamaan (2.6).

Jika Q dan R pada persamaan (2.25) dan persamaan (2.26) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.17) akan diperoleh

$$z^3 + 3Qz - 2R = 0 \tag{2.29}$$

Persamaan (2.29) akan ditentukan ketiga akar-akarnya dengan memisalkan faktor-faktornya. Misalkan B adalah sebarang konstanta riil yang memenuhi polinomial kubik sempurna

$$z^3 - B^3 = (z - B)(z^2 + Bz + B^2) \tag{2.30}$$

Persamaan (2.29) dapat difaktorkan dengan cara di atas apabila persamaan (2.29) mempunyai nilai $Q = 0$. Jika nilai $Q \neq 0$ maka kedua ruas dari persamaan (2.29) ditambah dengan perkalian suatu konstanta dengan faktor $(z - B)$ misalkan $C(z - B)$ sehingga menjadi

$$(z^3 - B^3) + C(z - B) = (z - B)(z^2 + Bz + B^2 + C) = 0 \tag{2.31}$$

maka dikelompokkan menurut koefisien menjadi

$$z^3 + Cz - (B^3 + BC) = (z - B)[z^2 + Bz + (B^2 + C)] = 0 \tag{2.32}$$

Berdasarkan persamaan (2.32) dapat diketahui bahwa $(z - B)$ dan $[z^2 + Bz + (B^2 + C)]$ adalah masing-masing faktor dari $z^3 + Cz - (B^3 + BC)$. Apabila ruas kiri dari persamaan (2.29) ekivalen dengan persamaan (2.32) akan diperoleh

$$C = 3Q \tag{2.33}$$

$$B^2 + BC = 2R \tag{2.34}$$

Misal B adalah jumlah dari kedua akar-akar persamaan (2.28) akan ditunjukkan B memenuhi persamaan (2.29) sehingga B merupakan salah satu faktor dari persamaan (2.29).

Berdasarkan persamaan (2.28) akan diperoleh nilai B

$$B = \left[R + \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[R - \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{1}{3}}, \tag{2.35}$$

maka kuadrat dari B adalah

$$B^2 = \left(\left[R + \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[R - \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{1}{3}}\right)^2$$

$$= \left[R + \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{2}{3}} + 2[R^2 - (R^2 + Q^3)]^{\frac{1}{3}} + \left[R - \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left[R + \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{2}{3}} + \left[R - \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{2}{3}} - 2Q.$$

Pangkat tiga nya adalah

$$B^3 = \left\{-2Q + \left[R + \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{2}{3}} + \left[R - \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{2}{3}}\right\} \times B$$

$$= -2QB + \left\{\left[R + \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{2}{3}} + \left[R - \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{2}{3}}\right\}$$

$$\left\{\left[R + \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[R - \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{1}{3}}\right\}$$

$$= -2QB + \left[R + \sqrt{R^2 + Q^3}\right] + \left[R - \sqrt{R^2 + Q^3}\right] + \left[R + \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{1}{3}}\left[R - \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{2}{3}} + \left[R + \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{2}{3}}\left[R - \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= -2QB + 2R - QB$$

$$= -3QB + 2R \tag{2.36}$$

Jika persamaan (2.35) dan persamaan (2.36) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.29) maka akan diperoleh:

$$(-3QB + 2R) + 3QB - 2R = 0$$

Nilai B memenuhi persamaan (2.29), ini membuktikan bahwa $(z - B)$ merupakan faktor dari persamaan (2.29). Jadi B merupakan salah satu akar dari persamaan (2.29) sehingga dapat ditulis

$$z_1 = \left[R + \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[R - \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{1}{3}} \tag{2.37}$$

Selanjutnya lihat kembali persamaan (2.32), untuk faktor lainnya yaitu:

$$z^2 + Bz + (B^2 + C) = 0$$

dapat ditentukan akar-akarrnya dengan menggunakan rumus persamaan kuadrat:

$$z_{2,3} = \frac{1}{2}\left[-B \pm \sqrt{B^2 - 4(B^2 + C)}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[-B \pm \sqrt{B^2 - 4B^2 - 12Q}\right]$$
$$= -\frac{1}{2}B \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3B^2 - 12Q}$$
$$= -\frac{1}{2}B \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i\sqrt{B^2 + 4Q} \qquad (2.38)$$

Persamaan (2.37) dan persamaan (2.38) adalah akar-akar dari persamaan (2.29), bentuk ini masih dapat di sederhanakan dengan menggunakan selisih dari akar-akar persamaan (2.28).

Misalkan A adalah selisih dari w_1 dan w_2 maka diperoleh

$$A = \left[R + \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{1}{3}} - \left[R - \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{1}{3}} \qquad (2.39)$$

$$A^2 = \left\{\left[R + \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{1}{3}} - \left[R - \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^2$$
$$= \left[R + \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{2}{3}} - 2[R^2 - (R^2 + Q^3)]^{\frac{2}{3}} + \left[R - \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{2}{3}}$$
$$= \left[R + \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{2}{3}} + \left[R - \sqrt{R^2 + Q^3}\right]^{\frac{2}{3}} + 2Q$$
$$= B^2 + 4Q.$$

Sehingga persamaan (2.38) dapat ditulis

$$z_{2,3} = -\frac{1}{2}B \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\, iA. \qquad (2.40)$$

Definisikan

$$D = R^2 + Q^3 \qquad (2.41)$$

dengan D adalah diskriminan dari persamaan polinomial kubik.

dari persamaan (2.41), maka persamaan (2.35) dapat dimisalkan menjadi

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{D}} \qquad (2.42)$$
$$T = \sqrt[3]{R - \sqrt{D}} \qquad (2.43)$$

Berdasarkan persamaan (2.35) dan persamaan (2.39), diperoleh

$$B = S + T$$
$$A = S - T$$
Selanjutnya persamaan (2.37) dapat ditulis
$$z_1 = S + T,$$
Sehingga persamaan (2.40), didapat:
$$z_2 = -\tfrac{1}{2}(S + T) + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}i(S - T),$$
$$z_3 = -\tfrac{1}{2}(S + T) - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}i(S - T).$$

Setelah diperoleh akar-akar persamaan kubik dalam bentuk persamaan (2.17), jika nilai z di subsitusikan kedalam persamaan (2.13), maka diperoleh

$$\mu_1 = -\frac{b}{3a} + (S + T), \tag{2.44}$$
$$\mu_2 = -\frac{b}{3a} - \frac{1}{2}(S + T) + \frac{1}{2}\sqrt{3}i(S - T) \tag{2.45}$$
$$\mu_3 = -\frac{b}{3a} - \frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{2}\sqrt{3}i(S - T) \tag{2.46}$$

2.7 Diskriminan Persamaan Kubik

Berdasarkan Sub bab 2.6 telah diketahui akar-akar persamaan kubik, maka dapat diketahui bagaimana pengaruh diskriminan D pada akar-akar persamaan kubik

1. Jika $D > 0$, maka akar-akar persamaan kubik memiliki tiga akar-akar yang berlainan, satu diantaranya riil dan dua diantaranya kompleks, sehingga akar-akarnya menjadi
$$\mu_1 = -\frac{1}{3}b + (S + T)$$
$$\mu_2 = -\frac{1}{3}b + \frac{1}{2}(S + T) + \frac{1}{2}\sqrt{3}i(S - T)$$
$$\mu_3 = -\frac{1}{3}b - \frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{2}\sqrt{3}i(S - T).$$
2. Jika $D = 0$, maka akar-akar persamaan kubik memiliki tiga akar riil dan dua diantaranya bernilai sama, sehingga akar-akarnya menjadi

$$\mu_1 = -\frac{1}{3}b + (S+T)$$

$$\mu_2 = -\frac{1}{3}b - \frac{1}{2}(S+T)$$

$$\mu_3 = -\frac{1}{3}b - \frac{1}{2}(S+T).$$

3. Jika $D < 0$, maka akar-akar persamaan kubik diubah dahulu ke bentuk polar. Pandang kembali persamaan (2.17)

Dengan menggunakan substitusi trigonometri, misalkan

$$z = 2\sqrt{-Q}\, cos\frac{1}{3}\theta \qquad (2.47)$$

Substitusikan persamaan (2.47) ke dalam persamaan (2.17), sehingga menjadi:

$$\left(2\sqrt{-Q}\, cos\frac{1}{3}\theta\right)^3 + p\left(2\sqrt{-Q}\, cos\frac{1}{3}\theta\right) - q = 0.$$

Berdasarkan persamaan (2.25) dan persamaan (2.26) diperoleh:

$$\left(2\sqrt{-Q}\, cos\frac{1}{3}\theta\right)^3 + 3Q\left(2\sqrt{-Q}\, cos\frac{1}{3}\theta\right) - 2R = 0$$

$$8\left(\sqrt{-Q}\right)^3 cos^3\frac{1}{3}\theta - 6(-Q)\sqrt{-Q}\cos\frac{1}{3}\theta - 2R = 0$$

$$8\left(\sqrt{-Q}\right)^3 cos^3\frac{1}{3}\theta - 6\left(\sqrt{-Q}\right)^3\cos\frac{1}{3}\theta - 2R = 0 \qquad (2.48)$$

Selanjutnya, dipunyai

$$4cos^3\theta - 3\cos\theta = cos(3\theta) \qquad (2.49)$$

Persamaan (2.49) dapat juga ditulis

$$4cos^3\frac{1}{3}\theta - 3\cos\frac{1}{3}\theta = cos\left(3\frac{1}{3}\theta\right) = cos\theta$$

Sehingga persamaan (2.48) menjadi:

$$2\left(\sqrt{-Q}\right)^3 cos\theta = 2R \qquad (2.50)$$

$$cos\theta = \frac{R}{\left(\sqrt{-Q}\right)^3} \qquad (2.51)$$

Berdasarkan persamaan (2.51) diatas dapat ditentukan nilai θ

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{R}{\left(\sqrt{-Q}\right)^3}\right)$$

Sementara itu persamaan (2.47) dapat ditentukan akar-akar dari persamaan (2.17) menjadi

$$\mu_1 = 2\sqrt{-Q}cos\frac{\theta}{3} \tag{2.52}$$

Dua akar-akar lainnya dapat diketahui yaitu

$$\mu_2 = 2\sqrt{-Q}cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) \tag{2.53}$$

$$\mu_3 = 2\sqrt{-Q}cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) \tag{2.54}$$

Berdasarkan persamaan (2.13) dapat diperoleh akar-akar dari bentuk umum persamaan (2.6) menjadi

$$\mu_1 = 2\sqrt{-Q}cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{b}{3a}$$

$$\mu_2 = 2\sqrt{-Q}cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) - \frac{b}{3a}$$

$$\mu_3 = 2\sqrt{-Q}cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) - \frac{b}{3a}$$

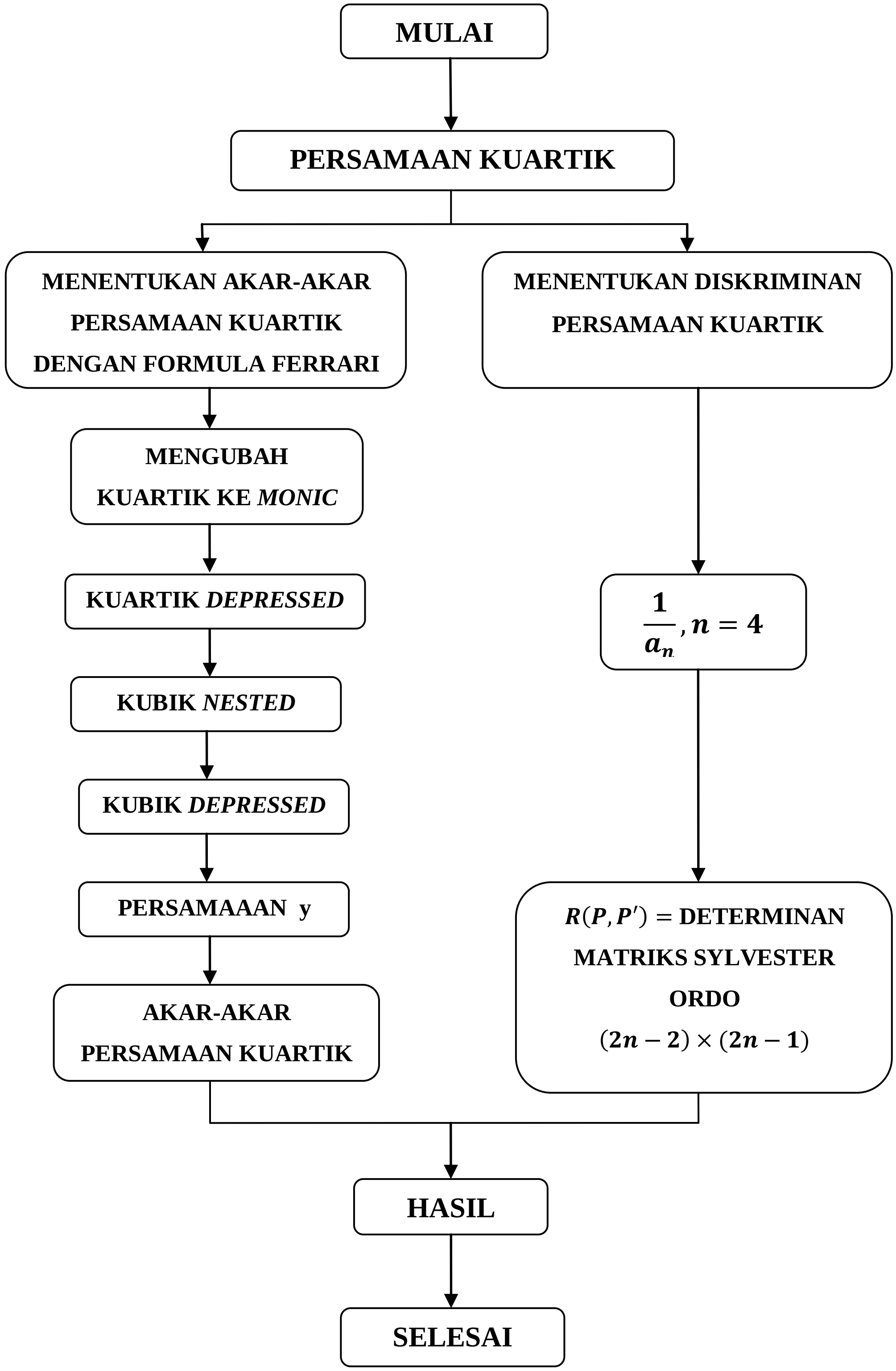
Jadi, jika $D < 0$, maka akar-akar persamaan kubik mempunyai tiga akar-akar riil yang berlainan.

BAB III
METODELOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian yang penulis gunakan adalah studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1) Menentukan persamaan kuartik.
2) Menentukan akar-akar persamaan kuartik dengan formula *Ferrari*, pertama mengubah persamaan kuartik ke bentuk *monic*, kemudian menghasilkan persamaan kuartik *depressed*, selanjutnya diubah ke bentuk persamaan kubik *nested*. Untuk mempermudah penyelesaian pada kubik *depressed* mengganti variabel y menjadi variabel v. Selanjutnya setelah didapat nilai y dapat diperoleh akar-akar persamaan kuartik.
3) Menentukan diskriminan persamaan kuartik, setelah didapat akar-akar persamaan kuartik selanjutnya dapat ditentukan diskriminannya menggunakan rumus polinomial yaitu mencari diskriminan dari matriks Sylvester ordo $(2n-1) \times (2n-1)$.

Langkah-langkah metodologi penelitian di atas dapat digambarkan dalam *flow chart* sebagai berikut:



Gambar 3.1 *Flow chat* metode penelitian

BAB IV

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan tentang menentukan akar-akar persamaan kuartik dan menentukan diskriminan serta pengaruhnya terhadap akar-akar persamaan kuartik. Bab ini terdiri dari dua Sub bab, yaitu Sub bab pertama berisi tentang menentukan akar-akar pada persamaan kuartik, dan Sub bab kedua berisi tentang diskriminan dan jenis akar-akar persamaan kuartik.

4.1 Akar-akar pada Persamaan Kuartik

Persamaan kuartik adalah persamaan polinomial berderajat empat, dengan bentuk umum dalam variabel x sebagai berikut:

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \tag{4.1}$$

dengan a_4, $a_{3,}$ $a_{2,}$ $a_{1,}$ a_0 adalah konstanta riil, dan $a_4 \neq 0$

Persamaan (4.1) mempunyai empat akar-akar yang dinotasikan dengan x_1, x_2, x_3 dan x_4. Formula *Ferrari* bisa menjadi cara alternatif untuk menentukan akar-akar persamaan kuartik.

Berikut ini akan diuraikan formula *Ferrari* untuk menentukan akar-akar persamaan kuartik dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Persamaan (4.1) diubah ke dalam bentuk *monic* yaitu dengan membagi konstanta riil dengan a_4, sehingga menjadi

$$x^4 + \frac{a_3}{a_4}x^3 + \frac{a_2}{a_4}x^2 + \frac{a_1}{a_4}x + \frac{a_0}{a_4} = 0 \tag{4.2}$$

2. Agar menghasilkan persamaan kuartik *depressed*, variabel x^3 dieliminasi dengan mensubstitusikan bentuk

$$x = u - \frac{a_3}{4a_4} \tag{4.3}$$

Sehingga persamaan (4.2), menjadi

$$\left(u - \frac{a_3}{4a_4}\right)^4 + \frac{a_3}{a_4}\left(u - \frac{a_3}{4a_4}\right)^3 + \frac{a_2}{a_4}\left(u - \frac{a_3}{4a_4}\right)^2 + \frac{a_1}{a_4}\left(u - \frac{a_3}{4a_4}\right) + \frac{a_0}{a_4} = 0$$

Selanjutnya, dengan menggunakan perkalian binomial untuk masing-masing suku, di peroleh

$$\left(u^4 - \frac{a_3}{a_4}u^3 + \frac{6a_3}{16{a_4}^2}u^2 - \frac{4{a_3}^3}{64{a_4}^3}u + \frac{{a_3}^4}{256{a_4}^4}\right) + \frac{a_3}{a_4}\left(u^3 - \frac{3a_3}{4a_4}u^2 + \frac{3{a_3}^2}{16{a_4}^2}u - \frac{{a_3}^3}{64{a_4}^3}\right) + \frac{a_2}{a_4}\left(u^2 - \frac{a_3}{2a_4}u - \frac{{a_3}^2}{16{a_4}^2}\right) + \frac{a_1}{a_4}\left(u - \frac{a_3}{4a_4}\right) + \frac{a_0}{a_4} = 0$$

Kelompokkan variabel dengan derajat yang sama, sehingga:

$$u^4 + \left(\frac{-3{a_3}^2}{8a_4} + \frac{a_2}{a_4}\right)u^2 + \left(\frac{{a_3}^3}{8{a_4}^3} - \frac{a_3a_2}{2{a_4}^2} + \frac{a_1}{a_4}\right)u + \left(\frac{-3{a_3}^4}{256{a_4}^4} + \frac{{a_3}^2a_2}{16{a_4}^3} - \frac{a_3a_1}{4{a_4}^2} + \frac{a_0}{a_4}\right) = 0$$

Untuk memudahkan penulisan koefisien $u,$ misalkan:

$$\alpha = \frac{-3{a_3}^2}{8{a_4}^2} + \frac{a_2}{a_4},$$

$$\beta = \frac{{a_3}^3}{8a_4} - \frac{a_3a_2}{2{a_4}^2} + \frac{a_1}{a_4},$$

$$\gamma = \frac{-3{a_3}^4}{256{a_4}^4} + \frac{{a_3}^2a_2}{16{a_4}^3} - \frac{a_3a_1}{4{a_4}^2} + \frac{a_0}{a_4}.$$

Sehingga menghasilkan persamaan

$$u^4 + \alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0 \tag{4.4}$$

Persamaan (4.4) adalah persamaan kuartik *depressed*. Untuk $\beta = 0$ maka persamaan (4.4) menjadi persamaan bikuartik. Akar-akarnya dapat ditentukan dengan menggunakan substitusi variabel dengan rumus kuadratik.

Jika $\gamma = 0$ maka persamaannya menjadi $u^4 + \alpha u^2 + \beta u = 0$. Salah satu akarnya adalah $u = 0$ dan akar-akar lainnya dapat ditentukan dengan membagi persamaan dengan u, sehingga didapat persamaan kubik *depressed* $u^3 + \alpha u + \beta = 0$. Persamaan kubik *depressed* dapat ditentukan akar-akarnya dengan formula *Cardano*.

3. Selanjutnya persamaan kuartik *depressed* diubah ke bentuk persamaan kubik *nested*, dengan menggunakan metode yang ditentukan oleh *Ferrari*, yang dinamakan dengan formula *Ferrari*

Misalkan:

$$(u^2 + \alpha)^2 = u^4 + 2\alpha u^2 + \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow (u^2 + \alpha)^2 - u^4 - 2\alpha u^2 = \alpha^2 \tag{4.5}$$

Persamaan (4.5) jika ditambahkan ke dalam persamaan (4.4), diperoleh

$$(u^2 + \alpha)^2 - u^4 - 2\alpha u^2 + u^4 + \alpha u^2 + \beta u + \gamma = \alpha^2 + 0$$

$$\Leftrightarrow (u^2 + \alpha)^2 - 2\alpha u^2 + \alpha u^2 + \beta u + \gamma = \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow (u^2 + \alpha)^2 - \alpha u^2 + \beta u + \gamma = \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow (u^2 + \alpha)^2 + \beta u + \gamma = \alpha u^2 + \alpha^2 \tag{4.6}$$

Langkah selanjutnya adalah menambahkan variabel y ke dalam kuadrat sempurna di sisi kiri persamaan (4.6), dan menyesuaikan dengan menambah variabel $2y$ ke dalam koefisien u^2 di sisi kanan persamaan (4.6)

$$(u^2+\alpha+y)^2-(u^2+\alpha)^2=(u^4+\alpha u^2+yu^2+\alpha u^2+\alpha^2+\alpha y+yu^2+\alpha y+ y^2)-(u^4+\alpha u^2+\alpha u^2+\alpha^2)$$

$$=2\alpha u^2+2yu^2+2\alpha y+y^2-2\alpha u^2$$

$$=2y(u^2+\alpha)+y^2$$
$$=2yu^2+2y\alpha+y^2 \qquad (4.7)$$

Diketahui:

$$0=(\alpha+2y)u^2-2yu^2-\alpha u^2 \qquad (4.8)$$

Selanjutnya, persamaan (4.7) dan persamaan (4.8) ditambah bersama-sama masing-masing ruas, menghasilkan

$$(u^2+\alpha+y)^2-(u^2+\alpha)^2=(\alpha+2y)u^2-\ \alpha u^2+2y\alpha+y^2 \qquad (4.9)$$

Persamaan (4.9) ditambah ke dalam persamaan (4.6), menghasilkan

$$(u^2+\alpha+y)^2+\beta u+\gamma=(\alpha+2y)u^2+(2y\alpha+y^2+\alpha^2) \qquad (4.10)$$

$$(u^2+\alpha+y)^2=(\alpha+2y)u^2+(2y\alpha+y^2+\alpha^2)-\beta u-\gamma$$

$$(u^2+\alpha+y)^2=(\alpha+2y)u^2-\beta u+(y^2+2y\alpha+\alpha^2-\gamma) \qquad (4.11)$$

Langkah berikutnya adalah mencari nilai untuk y sedemikian hingga sisi kanan persamaan (4.11) merupakan persamaan kuadrat sempurna.

Misalkan:

$$(su+t)^2=(s^2)u^2+(2st)u+(t^2). \qquad (4.12)$$

Selanjutnya, memisalkan diskriminannya sama dengan nol, diperoleh

$$(2st)^2 - 4(s^2)(t^2) = 0 \tag{4.13}$$

Untuk membuat sisi kanan persamaan (4.11) menjadi kuadrat sempurna, maka diskriminan pada sisi kanan persamaan (4.11) harus sama dengan nol, yaitu:

$$(-\beta)^2 - 4(2y+\alpha)(y^2 + 2y\alpha + \alpha^2 - \gamma) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \beta^2 - 4\big(2y^3 + 5\alpha y^2 + (4\alpha^2 - 2\gamma)y + (\alpha^3 - \alpha\gamma)\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\beta^2}{4} + \big(2y^3 + 5\alpha y^2 + (4\alpha^2 - 2\gamma)y + (\alpha^3 - \alpha\gamma)\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 2y^3 + 5\alpha y^2 + (4\alpha^2 - 2\gamma)y + \left(\alpha^3 - \alpha\gamma - \frac{\beta^2}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ y^3 + \frac{5}{2}\alpha y^2 + (2\alpha^2 - \gamma)y + \left(\frac{\alpha^3}{2} - \frac{\alpha\gamma}{2} - \frac{\beta^2}{8}\right) = 0 \tag{4.14}$$

Persamaan (4.14) dinamakan dengan persamaan kubik *nested*.

4. Selanjutnya mengubah persamaan kubik *nested* ke persamaan kubik *depressed* dengan memisalkan

$$y = v - \frac{5}{6}\alpha\ , \tag{4.15}$$

sehingga persamaan (4.14) menjadi

$$\left(v - \frac{5}{6}\alpha\right)^3 + \frac{5}{2}\alpha\left(v - \frac{5}{6}\alpha\right)^2 + (2\alpha^2 - \gamma)\left(v - \frac{5}{6}\alpha\right) + \left(\frac{\alpha^3}{2} - \frac{\alpha\gamma}{2} - \frac{\beta^2}{8}\right) = 0. \tag{4.16}$$

dengan menggunakan perkalian binomial masing-masing suku, diperoleh

$$\left(v^3-\tfrac{5}{2}\alpha v^2+\tfrac{25}{12}\alpha^2 v-\tfrac{125}{216}\alpha^3\right)+\tfrac{5}{2}\alpha\left(v^2-\tfrac{5}{3}\alpha v+\tfrac{25}{36}\alpha^2\right)+$$

$$(2\alpha^2-\gamma)\left(v-\tfrac{5}{6}\alpha\right)+\left(\tfrac{\alpha^3}{2}-\tfrac{\alpha\gamma}{2}-\tfrac{\beta^2}{8}\right)=0. \tag{4.17}$$

dengan mengelompokkan variabel v untuk derajat yang sama, diperoleh

$$v^3+\left(-\frac{\alpha^2}{12}-\gamma\right)v+\left(-\frac{\alpha^3}{108}+\frac{\alpha\gamma}{3}-\frac{\beta^2}{8}\right)=0. \tag{4.18}$$

Misalkan:

$$m=-\frac{\alpha^2}{12}-\gamma\,,$$

$$n=-\frac{\alpha^3}{108}+\frac{\alpha\gamma}{3}-\frac{\beta^2}{8},$$

sehingga persamaan (4.18) menjadi

$$v^3+mv+n=0 \tag{4.19}$$

Persamaan (4.19) disebut persamaan kubik *depressed*.

5. Persamaan (4.19) akan ditentukan akar-akarnya dengan mengubah ke dalam bentuk kuadrat. Misalkan v pada persamaan (4.19) adalah:

$$v=U-\frac{m}{3U} \tag{4.20}$$

Persamaan (4.19) menjadi

$$\left(U-\frac{m}{3U}\right)^3+m\left(U-\frac{m}{3U}\right)+n=0 \tag{4.21}$$

Dengan menggunakan perkalian binomial

$$\left(U^3 - mU - \frac{m^3}{27U^3} + \frac{m^2}{3U}\right) + mU - \frac{m^2}{3U} + n = 0$$

Selanjutnya, mengelompokkan variabel u dengan derajat yang sama, sehingga didapat persamaan

$$U^3 - \frac{m^3}{27U^3} - mU + mU + \frac{m^2}{3U} - \frac{m^2}{3U} + n = 0$$

$$\Leftrightarrow\ U^3 - \frac{m^3}{27U^3} + n = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad U^3 - \frac{m^3}{27U^3} + n = 0 \qquad (4.22)$$

Persamaan (4.22) diubah ke bentuk kuadrat dengan mengalikan kedua ruas dengan U^3, menjadi

$$U^3(U^3) - \frac{m^3(U^3)}{27(U^3)} + n(U^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad U^6 - \frac{m^3}{27} + nU^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad (U^3)^2 - \frac{m^3}{27} + nU^3 = 0\,. \qquad (4.23)$$

Misalkan

$$U^3 = L, \qquad (4.24)$$

maka persamaan (4.23) menjadi:

$$L^2 - \frac{m^3}{27} + nL = 0\,,$$

$$L^2 + nL - \frac{m^3}{27} = 0\,. \tag{4.25}$$

Persamaan (4.25) adalah persamaan kuadratik. Dengan menggunakan rumus kuadratik, persamaan (4.25) dapat ditentukan akar-akarnya, yaitu:

$$L = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 + \frac{4m^3}{27}}}{2}$$

$$L = -\frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}} \tag{4.26}$$

Berdasarkan persamaan (4.24), maka persamaan (4.26) menjadi

$$U^3 = -\frac{1}{2}n \pm \sqrt{\frac{1}{4}n^2 + \frac{m^3}{27}}$$

$$U = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}n \pm \sqrt{\frac{1}{4}n^2 + \frac{m^3}{27}}} \tag{4.27}$$

Berdasarkan persamaan (4.26), maka persamaan (4.27) menjadi

$$U = \sqrt[3]{L}\,.$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (4.20) ke dalam persamaan (4.15), sehingga didapat persamaan

$$y = -\frac{5}{6}\alpha + U - \frac{m}{3U}, \tag{4.28}$$

Persamaan (4.28) merupakan penyelesaian dari persamaan kubik *nested*.

6. Selanjutnya, akar-akar persamaan kuartik dapat ditentukan dengan y pada persamaan (4.28), sekarang dapat diketahui bahwa sisi kanan persamaan (4.12) adalah kuadrat sempurna dalam bentuk:

$$(s^2)u^2 + (2st)u + (t^2) = \left(\left(\sqrt{(s^2)}\right)u + \frac{(2st)}{2\sqrt{(s^2)}}\right)^2, \tag{4.29}$$

sehingga,

$$(\alpha + 2y)u^2 + (-\beta)u + (y^2 + 2y\alpha + \alpha^2 - \gamma) = \left(\left(\sqrt{\alpha + 2y}\right)u + \frac{(-\beta)}{2\sqrt{(\alpha + 2y)}}\right)^2 \tag{4.30}$$

Persamaan (4.11) menjadi

$$(u^2 + \alpha + y)^2 = \left(\left(\sqrt{\alpha + 2y}\right)u - \frac{\beta}{2\sqrt{(\alpha + 2y)}}\right)^2 \tag{4.31}$$

Persamaan (4.31) memiliki sepasang kuadrat sempurna, sehingga

$$(u^2 + \alpha + y) = \pm\left(\left(\sqrt{\alpha + 2y}\right)u - \frac{\beta}{2\sqrt{(\alpha + 2y)}}\right) \tag{4.32}$$

Jika variabel u dikelompokkan menurut derajatnya, maka diperoleh

$$u^2 + \left(\mp_s\sqrt{\alpha + 2y}\right)u + \left(\alpha + y \pm_s \frac{\beta}{2\sqrt{(\alpha + 2y)}}\right) = 0 \tag{4.33}$$

Persamaan (4.33) adalah persamaan kuadrat dalam bentuk variable u, solusinya adalah

$$u=\frac{\pm_s\sqrt{\alpha+2y}\pm_t\sqrt{(\alpha+2y)-4\left(\alpha+y\pm_s\frac{\beta}{2\sqrt{(\alpha+2y)}}\right)}}{2} \tag{4.34}$$

Persamaan (4.34) disederhanakan, sehingga didapat

$$u=\frac{\pm_s\sqrt{\alpha+2y}\pm_t\sqrt{-\left(3\alpha+2y\pm_s\frac{2\beta}{\sqrt{(\alpha+2y)}}\right)}}{2}\ . \tag{4.35}$$

Persamaan (4.35) adalah penyelesaian dari persamaan kuartik. Dari persamaan (4.3) dan persamaan (4.35), diperoleh persamaan

$$x+\frac{a_3}{4a_4}=\frac{\pm_s\sqrt{\alpha+2y}\pm_t\sqrt{-\left(3\alpha+2y\pm_s\frac{2\beta}{\sqrt{(\alpha+2y)}}\right)}}{2}$$

$$x=-\frac{a_3}{4a_4}+\frac{\pm_s\sqrt{\alpha+2y}\pm_t\sqrt{-\left(3\alpha+2y\pm_s\frac{2\beta}{\sqrt{(\alpha+2y)}}\right)}}{2} \tag{4.36}$$

Misalkan:

$$H=\sqrt{\alpha+2y}$$

Sehingga persamaan (4.36) menjadi

$$x=-\frac{a_3}{4a_4}+\frac{\pm_s H\pm_t\sqrt{-\left(3\alpha+2y\pm_s\frac{2\beta}{H}\right)}}{2} \tag{4.37}$$

Persamaan (4.37) penyelesaian dari persamaan kuartik. Jika persamaan (4.37) diuraikan, akan diperoleh akar-akar persamaan kuartik dari variable x sebagai berikut:

$$x_1 = -\frac{a_3}{4a_4} + \frac{H + \sqrt{-\left(3\alpha + 2y + \frac{2\beta}{H}\right)}}{2} \tag{4.38}$$

$$x_2 = -\frac{a_3}{4a_4} + \frac{H - \sqrt{-\left(3\alpha + 2y + \frac{2\beta}{H}\right)}}{2} \tag{4.39}$$

$$x_3 = -\frac{a_3}{4a_4} + \frac{-H + \sqrt{-\left(3\alpha + 2y - \frac{2\beta}{H}\right)}}{2} \tag{4.40}$$

$$x_4 = -\frac{a_3}{4a_4} + \frac{-H - \sqrt{-\left(3\alpha + 2y - \frac{2\beta}{H}\right)}}{2} \tag{4.41}$$

4.2 Diskriminan Persamaan Kuartik

Diberikan persamaan kuartik dan turunannya

$$P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P^{'}(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

Berdasarkan persamaan (2.2) dapat ditentukan

$$D_4 = (-1)^{\frac{1}{2}4(4-1)}\frac{1}{a_4}R(P,P')$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}4(4-1)}\frac{1}{a_4}R(P,P'),$$

$$= (-1)^6\frac{1}{a_4}R(P,P'),$$

$$= \frac{1}{a_4}R(P,P'),$$

dengan

$$R(P,P') = \det\begin{bmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & 1a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & 1a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & 1a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & 1a_1 \end{bmatrix}.$$

Sehingga, dengan menggunakan maple 13 diperoleh

$$\begin{aligned} R(P,P') = a_4(&256a_0{}^3a_4{}^3 - 192a_0{}^2a_1a_3a_4{}^2 - 27a_0{}^2a_3{}^4 + 144a_0{}^2a_2a_3{}^2a_4 \\ &- 128a_0{}^2a_2{}^2a_4{}^2 + 16a_0a_2{}^2a_4 - 80a_0a_1a_2{}^2a_3a_4 + 18a_0a_1a_2a_3{}^3 \\ &- 6a_0a_1a_3{}^2a_4 + 144a_0a_1{}^2a_2a_4{}^2 - 4a_0a_2{}^2a_3{}^2 - 4a_1{}^2a_2{}^3a_4 \\ &- 44a_1{}^3a_3{}^3 - 27a_1{}^4a_4{}^2 + 18a_1{}^3a_2a_3a_4 + a_1{}^2a_2{}^2a_3{}^2), \end{aligned}$$

Sehingga

$$D_4 = \frac{1}{a_4}R(P,P').$$

$$\begin{aligned} D_4 = \tfrac{1}{a_4}\big(a_4(&256a_0{}^3a_4{}^3 - 192a_0{}^2a_1a_3a_4{}^2 - 27a_0{}^2a_3{}^4 + 144a_0{}^2a_2a_3{}^2a_4 - \\ &128a_0{}^2a_2{}^2a_4{}^2 + 16a_0a_2{}^2a_4 - 80a_0a_1a_2{}^2a_3a_4 + 18a_0a_1a_2a_3{}^3 - \\ &6a_0a_1a_3{}^2a_4 + 144a_0a_1{}^2a_2a_4{}^2 - 4a_0a_2{}^2a_3{}^2 - 4a_1{}^2a_2{}^3a_4 - 44a_1{}^3a_3{}^3 - \\ &27a_1{}^4a_4{}^2 + 18a_1{}^3a_2a_3a_4 + a_1{}^2a_2{}^2a_3{}^2)\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_4 = {}&256a_0{}^3a_4{}^3 - 192a_0{}^2a_1a_3a_4{}^2 - 27a_0{}^2a_3{}^4 + 144a_0{}^2a_2a_3{}^2a_4 - \\ &128a_0{}^2a_2{}^2a_4{}^2 + 16a_0a_2{}^2a_4 - 80a_0a_1a_2{}^2a_3a_4 + 18a_0a_1a_2a_3{}^3 - \\ &6a_0a_1a_3{}^2a_4 + 144a_0a_1{}^2a_2a_4{}^2 - 4a_0a_2{}^2a_3{}^2 - 4a_1{}^2a_2{}^3a_4 - 44a_1{}^3a_3{}^3 - \\ &27a_1{}^4a_4{}^2 + 18a_1{}^3a_2a_3a_4 + a_1{}^2a_2{}^2a_3{}^2 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Diskriminan D_4 persamaan kuartik $P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ dapat juga ditentukan dengan menggunakan kuartik *depressed*:

$$\emptyset\,(u) = u^4 + \alpha u^2 + \beta u + \gamma$$

$$\emptyset'(u) = 4u^3 + 2\alpha u + \beta$$

Berdasarkan persamaan (2.2) dapat ditentukan

$$\begin{aligned} D_4 &= (-1)^{\frac{1}{2}4(4-1)} \frac{1}{a_4} R(P, P') \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}4(4-1)} \frac{1}{a_4} R(P, P') \\ &= (-1)^6 \frac{1}{a_4} R(P, P') \\ &= \frac{1}{a_4} R(P, P') \end{aligned}$$

$$R(P, P') = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 4 & 0 & 2\alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2\alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2\alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2\alpha & \beta \end{bmatrix}$$

Sehingga, dengan menggunakan maple 13 diperoleh

$$R(P, P') = -4\alpha^3\beta^2 - 27\beta^4 + 16\alpha^4\gamma + 144\alpha\beta^2\gamma - 128\alpha^2\gamma^2 + 256\gamma^3$$

Oleh karena $a_4 = 1$, maka rumus diskriminan D_4 menjadi

$$D_4 = R(P, P')$$

$$D_4 = -4\alpha^3\beta^2 - 27\beta^4 + 16\alpha^4\gamma + 144\alpha\beta^2\gamma - 128\alpha^2\gamma^2 + 256\gamma^3$$

dengan

$$\alpha = \frac{-3{a_3}^2}{8{a_4}^2} + \frac{a_2}{a_4},$$

$$\beta = \frac{{a_3}^3}{8a_4} - \frac{a_3 a_2}{2{a_4}^2} + \frac{a_1}{a_4},$$

$$\gamma = \frac{-3{a_3}^4}{256{a_4}^4} + \frac{{a_3}^2 a_2}{16{a_4}^3} - \frac{a_3 a_1}{4{a_4}^2} + \frac{a_0}{a_4}.$$

Jenis akar-akar persamaan kuartik sebagai berikut:

Berdasarkan: Compare, Dickson : 1914

1. $D_4 < 0$, akar-akarnya berbeda, dua riil dan dua imajiner.
2. $D_4 > 0$, akar-akarnya berbeda, semua riil atau semua imajiner.

   $\alpha < 0, \gamma > \frac{\alpha^2}{4}, \text{akar} - \text{akarnya imajiner}$

   $\gamma < \frac{\alpha^2}{4}, \text{akar} - \text{akarnya riil}$

   $\alpha \geq 0, \text{akar} - \text{akarnya imajiner}$
3. $D_4 = 0$, setidaknya dua akarnya kembar

   $\alpha < 0, \gamma > \frac{\alpha^2}{4}, \text{akar} - \text{akarnya dua riil dan kembar, dua imajiner}$

   $-\frac{\alpha^2}{12} < \gamma < \frac{\alpha^2}{4}, \text{akar} - \text{akarnya riil, hanya dua yang kembar}$

   $\gamma = \frac{\alpha^2}{4}, \text{dua pasang akar} - \text{akarnya riil dan kembar}$

   $\gamma = -\frac{\alpha^2}{12}, \text{akar} - \text{akarnya riil, tiga kembar.}$

   $\alpha > 0, \gamma > 0, \beta \neq 0$, dua akar-akarnya riil dan kembar, dua imajiner

   $\gamma = \frac{\alpha^2}{4}, \beta = 0, \text{dua pasang akar} - \text{akarnya imajiner dan kembar}$

$\gamma = 0$, dua akar-akarnya riil dan kembar, dua imajiner

$\alpha = 0, \gamma > 0$, dua akar-akarnya riil dan kembar, dua imajiner

$\gamma = 0$, empat akar-akarnya riil dan kembar.

Contoh 4.1 : Tentukan diskriminan dan akar-akar dari persamaan kuartik berikut

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$$

Penyelesaian :

Dari persamaan di atas diketahui: $a_4 = 1,\ a_3 = 0,\ a_2 = 6,\ a_1 = -60,$ dan $a_0 = 36$

Selanjutnya akan dicari nilai α, β, γ dengan rumus:

$$\alpha = \frac{-3{a_3}^2}{8{a_4}^2} + \frac{a_2}{a_4},$$

$$\beta = \frac{{a_3}^3}{8a_4} - \frac{a_3 a_2}{2{a_4}^2} + \frac{a_1}{a_4},$$

$$\gamma = \frac{-3{a_3}^4}{256{a_4}^4} + \frac{{a_3}^2 a_2}{16{a_4}^3} - \frac{a_3 a_1}{4{a_4}^2} + \frac{a_0}{a_4}.$$

Sehingga diperoleh

$$\alpha = \frac{-3(0)^2}{8(1)^2} + \frac{6}{1}$$

$$= 0 + 6$$

$$= 6$$

$$\beta = \frac{(0)^3}{8(1)} - \frac{0(6)}{3(1)^2} + \frac{(-60)}{1}$$

$$= 0 - 0 - 60$$

$= -60$

$$\gamma = \frac{-3(0)^4}{256(1)^4} + \frac{(0)^2.6}{16(1)^3} - \frac{0.1}{4(1)^2} + \frac{36}{1}$$

$= 0 + 0 - 0 + 36$

$= 36$

Setelah didapat nilai α, β, γ, selanjutnya akan dicari nilai diskriminan dengan menggunakan rumus diskriminan polinomial (2.2), diperoleh :

$$D = -4\alpha^3\beta^2 - 27\beta^4 + 16\alpha^4\gamma + 144\alpha\beta^2\gamma - 128\alpha^2\gamma^2 + 256\gamma^3$$
$$= -4(6)^3(-60)^2 - 27(-60)^4 + 16(6)^4(36) + 144(6)(-60)^2(36) - 128$$
$$(6)^2(36)^2 + 256(36)^3$$
$$= -3110400 - 349920000 + 746496 + 111974400 - 5971968 + 11943936$$
$$= -234337536$$

Diskriminan (D_4) persamaan kuartik $-234337536 < 0$. Berdasarkan pemaparan hasil, maka akar-akar persamaan di atas terdiri dari dua riil dan dua imajiner.

Selanjutnya akan dicari akar-akar persamaan kuartik, nilai P dan Q akan didapat dengan rumus :

$$m = -\frac{\alpha^2}{12} - \gamma\,,$$

$$n = -\frac{\alpha^3}{108} + \frac{\alpha\gamma}{3} - \frac{\beta^2}{8}\,,$$

Sehingga

$$m = -\frac{(6)^2}{12} - 36$$

$$= -\frac{36}{12} - 36$$

$$= \ -3 - 36$$

$$= -39$$

$$n = -\frac{(6)^3}{108} + \frac{6(36)}{3} - \frac{(-60)^2}{8}$$

$$= -\frac{216}{108} + \frac{216}{3} - \frac{3600}{8}$$

$$= -380$$

dari persamaan (4.27), diperoleh

$$U = \sqrt[3]{\frac{1}{2}Q \pm \sqrt{\frac{1}{4}Q^2 + \frac{P^3}{27}}}$$

$$U = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-380) + \sqrt{\frac{1}{4}(-380)^2 + \frac{(-39)^3}{27}}}$$

$$= \sqrt[3]{190 + \sqrt{36100 + (-2197)}}$$

$$= 7.20565$$

dan

$$v = \ U - \frac{m}{3U}$$

$$= 7.20565 - \frac{(-39)}{3(7.20565)}$$

$= 1.80413$

Berdasarkan persamaan (4.28), diperoleh

$$y = -\frac{5}{6}\alpha + U - \frac{m}{3U}$$

$$= -\tfrac{5}{6}(6) + 7.20565 - (-1.80413)$$

$$= -5 + 9.00979$$

$$= 4.00979$$

$$H = \sqrt{\alpha + 2y}$$

$$= \sqrt{6 + 2(4.00979)}$$

$$= 3.74427.$$

Sehingga diperoleh x_1, x_2, x_3 dan x_4 pada persamaan $(4.38), (4.39), (4.40), (4.41)$ sebagai berikut:

$$x_1 = -\frac{0}{4.1} + \frac{H + \sqrt{-\left(3\alpha + 2y + \frac{2\beta}{H}\right)}}{2}$$

$$= 0 + \frac{3.74427 + \sqrt{-\left(3(6) + 2(4.00979) + \frac{2(-60)}{3.74427}\right)}}{2}$$

$$= \frac{3.74427 + \sqrt{-(18 + 8.01958 - 32.0489)}}{2}$$

$$= \frac{3.74427 + \sqrt{6.02936}}{2}$$

$$= 3.09987$$

$$x_2 = -\frac{0}{4.1} + \frac{H - \sqrt{-\left(3\alpha + 2y + \frac{2\beta}{H}\right)}}{2}$$

$$= 0 + \frac{3.74427 - \sqrt{-\left(3(6) + 2(4.00979) + \frac{2(-60)}{3.74427}\right)}}{2}$$

$$= \frac{3.74427 - \sqrt{-(18 + 8.01958 - 32.0489)}}{2}$$

$$= \frac{3.74427 - \sqrt{6.02936}}{2}$$

$$= 0.64439$$

$$x_3 = -\frac{0}{4.1} + \frac{-H + \sqrt{-\left(3\alpha + 2y - \frac{2\beta}{H}\right)}}{2}$$

$$= 0 + \frac{-3.74427 + \sqrt{-\left(3(6) + 2(4.00979) - \frac{2(-60)}{3.74427}\right)}}{2}$$

$$= \frac{-3.74427 + \sqrt{-(18 + 8.01958 + 32.0489)}}{2}$$

$$= \frac{-3.74427 + \sqrt{-58.0685}}{2}$$

$$= -1.87213 - 3.81013\, I$$

$$x_4 = -\frac{0}{4.1} + \frac{-H - \sqrt{-\left(3\alpha + 2y - \frac{2\beta}{H}\right)}}{2}$$

$$= 0 + \frac{-3.74427 - \sqrt{-\left(3(6) + 2(4.00979) - \frac{2(-60)}{3.74427}\right)}}{2}$$

$$= \frac{-3.74427 - \sqrt{-(18 + 8.01958 + 32.0489)}}{2}$$

$$= \frac{-3.74427 - \sqrt{-58.0685}}{2}$$

$$= -1.87213 \ + 3.81013\, I$$

Diperoleh x_1 dan x_2 akar-akarnya riil, x_3 dan x_4 akar-akarnya imajiner.

Contoh 4.2 : Tentukan diskriminan dan akar-akar dari persamaan kuartik berikut:

$$x^4 + 6x^2 + 8x + 21 = 0$$

Penyelesaian :

Dari persamaan di atas diketahui: $a_4 = 1,\ a_3 = 0,\ a_2 = 6,\ a_1 = 8,\ a_0 = 21$

Kemudian akan dicari nilai α, β, γ dengan rumus:

$$\alpha = \frac{-3{a_3}^2}{8{a_4}^2} + \frac{a_2}{a_4},$$

$$\beta = \frac{{a_3}^3}{8a_4} - \frac{a_3 a_2}{2{a_4}^2} + \frac{a_1}{a_4},$$

$$\gamma = \frac{-3{a_3}^4}{256{a_4}^4} + \frac{{a_3}^2 a_2}{16{a_4}^3} - \frac{a_3 a_1}{4{a_4}^2} + \frac{a_0}{a_4}.$$

Sehingga di peroleh

$$\alpha = \frac{-3(0)^2}{8(1)^2} + \frac{6}{1}$$

$= 0 + 6$

$= 6$

$$\beta = \frac{(0)^3}{8(1)} - \frac{0(6)}{3(1)^2} + \frac{(8)}{1}$$

$= 0 - 0 + 8$

$= 8$

$$\gamma = \frac{-3(0)^4}{256(1)^4} + \frac{(0)^2.6}{16(1)^3} - \frac{0.1}{4(1)^2} + \frac{21}{1}$$

$= 0 + 0 - 0 + 21$

$= 21$

Setelah didapat nilai α, β, γ, selanjutnya akan dicari nilai diskriminan dengan menggunakan rumus diskriminan polinomial (2.2), diperoleh:

$$D = -4\alpha^3\beta^2 - 27\beta^4 + 16\alpha^4\gamma + 144\alpha\beta^2\gamma - 128\alpha^2\gamma^2 + 256\gamma^3$$
$$= -4(6)^3(8)^2 - 27(8)^4 + 16(6)^4(21) + 144(6)(8)^2(21) - 128$$
$$(6)^2(21)^2 + 256(21)^3$$
$$= -55296 - 110592 + 435456 + 1161216 - 2032128 + 2370816$$

Diskriminan (D_4) persamaan kuartik $1769427 > 0$. Berdasarkan pemaparan hasil, maka akar-akar persamaan di atas semua imajiner. Dengan syarat jika $\alpha \geq 0$, maka semua akar-akarnya imajiner.

Selanjutnya akan dicari akar-akar persamaan kuartik, nilai P dan Q akan didapat dengan rumus :

$$m = -\frac{\alpha^2}{12} - \gamma\ ,$$

$$n = -\frac{\alpha^3}{108} + \frac{\alpha\gamma}{3} - \frac{\beta^2}{8},$$

Sehingga:

$$m = -\frac{(6)^2}{12} - 21$$

$$= -\frac{36}{12} - 21$$

$$= -3 - 21$$

$$= -24$$

$$n = -\frac{(6)^3}{108} + \frac{6(21)}{3} - \frac{(8)^2}{8}$$

$$= -\frac{216}{108} + \frac{126}{3} - \frac{64}{8}$$

$$= 32$$

dari persamaan (4.27), diperoleh

$$U = \sqrt[3]{\frac{1}{2}Q \pm \sqrt{\frac{1}{4}Q^2 + \frac{P^3}{27}}}$$

$$U = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(32) + \sqrt{\frac{1}{4}(32)^2 + \frac{(-24)^3}{27}}}$$

$$= \sqrt[3]{16 + \sqrt{256 + (-512)}}$$

$$= 2.00000 + 2.00000\, I$$

dan

$$v = U - \frac{m}{3U}$$

$$= 2.00000 + 2.00000\, I - \frac{(-24)}{3(2.00000 + 2.00000\, I)}$$

$$= 2.00000 - 2.00000\, I$$

Berdasarkan persamaan (4.28), diperoleh:

$$y = -\frac{5}{6}\alpha + U - \frac{m}{3U}$$

$$= -\frac{5}{6}(6) + (2.00000 + 2.00000\, I) - (-2.00000 + 2.00000\, I)$$

$$= -1.00000 + 0.\, I$$

Selanjutnya:

$$H = \sqrt{\alpha + 2y}$$

$$= \sqrt{6 + 2(-1.00000 + 0.\, I)}$$

$$= 2.00000 + 0.\, I$$

Sehingga diperoleh $x_1,\ x_2,\ x_3$ dan x_4 pada persamaan $(4.38), (4.39), (4.40), (4.41)$ sebagai berikut:

$$x_1 = -\frac{0}{4.1} + \frac{H + \sqrt{-\left(3\alpha + 2y + \frac{2\beta}{H}\right)}}{2}$$

$$= 0 + \frac{2.00000 + 0.\, I + \sqrt{-\left(3(6) + 2(-1.00000 + 0.\, I) + \frac{2(-60)}{2.00000 + 0.\, I}\right)}}{2}$$

$$= 1.00000 + 2.44948\, I$$

$$x_2 = -\frac{0}{4.1} + \frac{H - \sqrt{-\left(3\alpha + 2y + \frac{2\beta}{H}\right)}}{2}$$

$$= 0 + \frac{2.00000 + 0.I - \sqrt{-\left(3(6) + 2(-1.00000 + 0.I) + \frac{2(-60)}{2.00000 + 0.I}\right)}}{2}$$

$$= 1.00000 - 2.44948\, I$$

$$x_3 = -\frac{0}{4.1} + \frac{-H + \sqrt{-\left(3\alpha + 2y - \frac{2\beta}{H}\right)}}{2}$$

$$= 0 + \frac{2.00000 + 0.I + \sqrt{-\left(3(6) + 2(-1.00000 + 0.I) - \frac{2(-60)}{2.00000 + 0.I}\right)}}{2}$$

$$= -1.00000 + 1.41421\, I$$

$$x_4 = -\frac{0}{4.1} + \frac{-H - \sqrt{-\left(3\alpha + 2y - \frac{2\beta}{H}\right)}}{2}$$

$$= 0 + \frac{2.00000 + 0.I - \sqrt{-\left(3(6) + 2(-1.00000 + 0.I) - \frac{2(-60)}{2.00000 + 0.I}\right)}}{2}$$

$$= -1.00000 - 1.41421\, I$$

$$= -1.872136644 + 3.810135337\, I$$

Diperoleh akar-akar x_1, x_2, x_3 dan x_4 semuanya imajiner.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan Bab IV maka diperoleh akar-akar persamaan kuartik $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ dengan menggunakan formula *Ferrari* adalah sebagai berikut:

$$x_1 = -\frac{a_3}{4a_4} + \frac{W + \sqrt{-\left(3\alpha + 2y + \frac{2\beta}{W}\right)}}{2}$$
$$x_2 = -\frac{a_3}{4a_4} + \frac{W - \sqrt{-\left(3\alpha + 2y + \frac{2\beta}{W}\right)}}{2}$$
$$x_3 = -\frac{a_3}{4a_4} + \frac{-W + \sqrt{-\left(3\alpha + 2y - \frac{2\beta}{W}\right)}}{2}$$
$$x_4 = -\frac{a_3}{4a_4} + \frac{-W - \sqrt{-\left(3\alpha + 2y - \frac{2\beta}{W}\right)}}{2}$$

dan diskriminan persamaan kuartik:

$$D_4 = -4\alpha^3\beta^2 - 27\beta^4 + 16\alpha^4\gamma + 144\alpha\beta^2\gamma - 128\alpha^2\gamma^2 + 256\gamma^3$$

dengan

$$\alpha = \frac{-3{a_3}^2}{8{a_4}^2} + \frac{a_2}{a_4},$$

$$\beta = \frac{{a_3}^3}{8a_4} - \frac{a_3a_2}{2{a_4}^2} + \frac{a_1}{a_4},$$

$$\gamma = \frac{-3{a_3}^4}{256{a_4}^4} + \frac{{a_3}^2a_2}{16{a_4}^3} - \frac{a_3a_1}{4{a_4}^2} + \frac{a_0}{a_4}.$$

Jenis-jenis Akar-akar persamaan kuartik ditentukan oleh nilai D.

5.2. Saran

Pada tugas akhir ini, penulis hanya membahas menentukan akar-akar persamaan kuartik menggunakan formula *Ferrari*. Oleh karena itu, penulis menyarankan pada pembaca yang ingin melanjutkan tugas akhir ini agar meneliti lebih lanjut menentukan akar-akar persamaan kuintik (polinomial berderajat lima) menggunakan formula yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Burton, D.M. *The History of Mathematics*. Edisi 5, halaman 297-311. William K. Barter, Inc. New York. 2003.

Dickson, L.E. *Elementary Theory of Equations.* John Wiley & Sons, Inc. London. 1914.

Ellis Robert, and Gullick Denny. *College Algebra and Trigonometry*, Printice-Hall, Inc. New York. 1981.

Fanchi, John R "Math refresher for scientists and engineers" 2006 [Online] Available http://books.google.com/books?id=75mAJPcAWT8C, diakse 7 Juli 2010

Faucette, William Mark "A Geometri Interpretation of the Solution of the General Quartic Polynomial. 1996 [Online] Available http://citcseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.111.5574&rep=repl&type=pdf, diakses 20 September 2010

Janson, Svante "Resultant and Discriminant of Polynomial" Sept. 2007. [Online] Available http://www.math.uu.se/~svante//papers/sjN5.pdf, diakses 16 Agustus 2010

Rohani, A.F. "Menentukan Akar-akar dan Diskriminan pada Persamaan Kubik". *Unri. Pekanbaru. 2007*

Vance, E.P. *Modern Algebra and Trigonometry, Third Edition*. Addison-Wesley publishing Compani, Inc. Amsterdam. 1973.